1.5　极限运算法则

1.5.1　四则运算法则

1.5.2　复合函数的极限运算法则

1.5 极限运算法则

1.5.1 四则运算法则

下面结果对 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$ 都成立。

定理1.5.1 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B,$

则 (1) $\lim\left[f(x) \pm g(x)\right] = A \pm B$

(2) $\lim\left[f(x) \cdot g(x)\right] = A \cdot B$

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

注 (1)结论可推广到有限个。

例如 若 $\lim f_1(x)=A_1, \lim f_2(x)=A_2, \lim f_3(x)=A_3$,

则
$$\lim\left[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right]=A_1+A_2-A_3$$
$$\lim\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\right]=A_1A_2A_3$$

但：$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\neq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$

(2)应用定理时,条件不能忽视,要两个极限都存在(有限)时才能进行。

推论1 $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)$，$C$为常数

推论2 $\lim[f(x)]^n=A^n$ (若$\lim f(x)=A$， $n\in N$为常数)

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^n)=a_0\lim_{x\to x_0}(x^n)=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n=a_0x_0{}^n$$

例1 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，求$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

解 $$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n)+\lim_{x\to x_0}(a_1x^{n-1})+\cdots+\lim_{x\to x_0}a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0)$$

如果 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$， 前提条件：$Q_m(x_0)\neq 0$

若 $Q_m(x_0)=0$ 呢？

例2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

(消去零因子法)

例3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$

解 $\because \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=0$ $\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$

例4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+4\dfrac{1}{x}+2\dfrac{1}{x^3}}{7+5\dfrac{1}{x^2}-3\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{3}{7}$ （$\dfrac{\infty}{\infty}$型）

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{7x^3+5x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5x-3}{2x^2+1}=\infty$$

例4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x-3}=\dfrac{3}{7}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{7x^3+5x-3}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+5x-3}{2x^2+1}=\infty$$

注 一般地,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n<m\end{cases}\quad\begin{pmatrix}a_0\neq 0\\ b_0\neq 0\end{pmatrix}$$

例5 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{1}{6}$ $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

例6 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ $(n\in N)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(C_n^1+C_n^2x+\cdots+C_n^nx^{n-1}\right)=n$$

例7 求$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right]$ $(\infty-\infty\text{型})$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1}{1+x}=-\dfrac{1}{2}$

总结：对于不定型 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty$ 型

利用代数变形,

(1).消去零因子法求极限;(因式分解，分母、分子有理化）

(2).无穷小因子分出法求极限;

(3). $\infty-\infty, 0\cdot\infty$型化为$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$。

例8 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x=0$

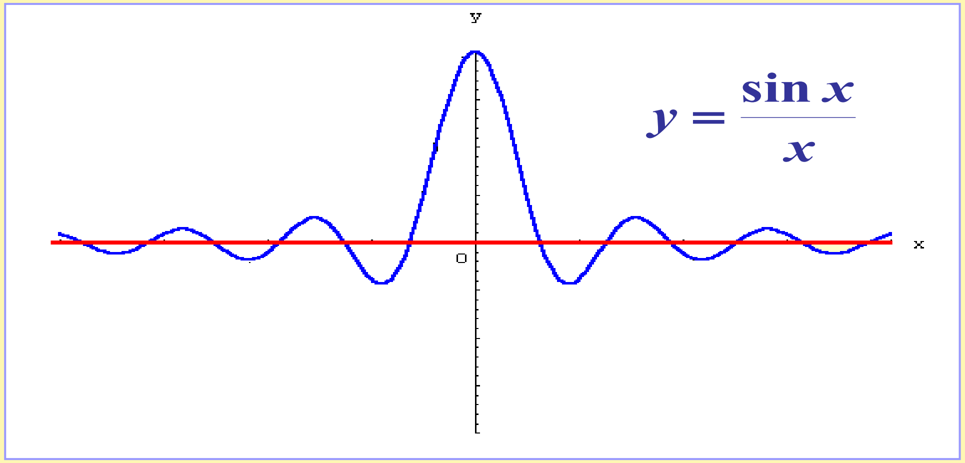
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x=0$$

设 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则

$$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=A\cdot B$$

无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=?$$



已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x-1\to 0}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}$ 希望如下结论成立：

因为 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, 所以：

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ 令 $u=x-1$

进一步地： 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}u=a$, $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,

那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$?

1.5.2 复合函数的极限运算法则

定理1.5.2 设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，$\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，且在$x_0$的某个去心邻域中$u = \varphi(x) \neq a$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to a} f(u) = A$$

(1) 该定理是求极限换元的理论依据,

例如 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

(2) 如果最后一个条件不满足, 则结论不一定成立,

定理1.5.2 设当$x \to x_0$时，$u=\varphi(x)\to a$;

当$u\to a$时，$f(u)\to A$，且

在x_0的某个去心邻域中$u=\varphi(x)\neq a$，则

$$\text{当}x\to x_0\text{时},f\left[\varphi(x)\right]=f(u)\to A.$$

(3) 条件中的$x\to x_0$和$u\to a$

可与$x\to\infty$和$u\to\infty$随意组合成多种形式。如：

当$x\to x_0$时，$u=\varphi(x)\to\infty$;

当$u\to\infty$时，$f(u)\to A$，则

$$\text{当}x\to x_0\text{时},f\left[\varphi(x)\right]=f(u)\to A.$$

例9 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}}$

解 $f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(x)=\dfrac{2(x^2-1)}{x-1}$

$$\because \lim_{x\to 1}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}2(x+1)=4$$

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{2(x^2-1)}{x-1}}=\lim_{u\to 4}\sqrt{u}=2$$

求极限的补充例子：

例4 求(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$

解 (1) $\because \lim\limits_{x\to 0} x = 0,\quad \sin\dfrac{1}{x}$ 是有界量

由无穷小性质：$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \infty\,?$

(无穷大乘有界量,不一定是无穷大)

正确解法 令 $y = \dfrac{1}{x},\quad \lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y} = 1$

例5 求(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$; (2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+b)x+ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)+\frac{ab}{x}}{\sqrt{(1+\frac{a}{x})(1+\frac{b}{x})}+1}=\frac{a+b}{2}$$

(2)令$y=\sqrt[3]{x}$,则 $\sqrt[3]{x^2}=y^2$, 且 $x\to1$时 $y\to1$

原式 $=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{y^2-2y+1}{(y^3-1)^2}=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{(y-1)^2}{(y-1)^2(y^2+y+1)^2}=\dfrac{1}{9}$

例6 求$\lim\limits_{x\to\infty} thx = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ 见教材图**1.12**

解：$\because \lim\limits_{x\to+\infty} thx = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} thx = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = -1$ $\therefore \lim\limits_{x\to\infty} thx$不存在。

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{x\to0^{+}} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to0^{-}} e^{\frac{1}{x}}$$

例7 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}$ $=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{e^{t}}{e^{t}-e^{-t}}$

解：因$\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}-1}=1+\dfrac{1}{e^{\frac{2}{x}}-1}$

当 $x\to 0^{+}$时，$\dfrac{2}{x}\to+\infty$，$e^{\frac{2}{x}}\to+\infty$，故$\lim\limits_{x\to 0^{+}}f(x)=1$

当 $x\to 0^{-}$时，$\dfrac{2}{x}\to-\infty$，$e^{\frac{2}{x}}\to 0$，故$\lim\limits_{x\to 0^{-}}f(x)=0$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在.

注：求函数$f(x)$在点x_0处的极限，都应看看单侧极限的情形，如果两侧变化趋势相同，则不用分开来讨论.

特别要注意的是分段函数的分段点，有些三角函数的特殊点，如：

$\tan x$在$x=\dfrac{\pi}{2}$处，$\arctan\dfrac{1}{x}$ 和 $e^{\frac{1}{x}}$ 在$x=0$处

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to+\infty}\arctan u=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{u\to-\infty}\arctan u=-\frac{\pi}{2}$$